

LA COLISIÓN OBLICUA

Ing. Aníbal O. García

RESUMEN

El presente trabajo es una revisión y ampliación de los conceptos de la colisión de masas puntuales en direcciones no colineales (oblicuas), tal como la hemos tratado en el capítulo 4.2 de nuestro libro¹. Este estudio ampliatorio ha sido incluido en la sección 6 de la segunda edición del mismo.

El análisis de reconstrucción de la colisión colineal puede ser también aplicado a masas puntuales, cuando en los movimientos posteriores al impacto predomina el desplazamiento del centro de masa de los rodados por sobre la rotación. En ese caso es viable descomponer los vectores impulso o cantidad de movimiento de cada vehículo antes y después del choque, en dos direcciones cualesquiera, sin cometer grandes errores. Ello se debe a que en estos casos las rotaciones resultan de escasa entidad respecto de los desplazamientos.

Si la descomposición se realiza en dos direcciones ortogonales, y una de ellas coincide con la dirección del vector velocidad del centro de masa del sistema, el análisis cae bajo los criterios de *Weaver* y *Brach* (4.2). En ese caso es posible determinar algunas características que permiten un análisis más fino y detallado de la colisión, incluyendo en la evaluación las magnitudes de energía disipada en función de la deformación residual de los vehículos por un lado, y la dirección de la resultante de las fuerzas actuantes durante la colisión (PDOF). Ambos elementos de evidencia, construibles en el análisis de los rastros tienen una significación física concreta y se incluyen en el análisis. De ello trata este trabajo

¹ *Aníbal O. García – ACCIDENTES DE TRÁNSITO – Investigación y Reconstrucción*, Ed. Nueva Librería, Buenos Aires 2011 (ISBN 978-987-1104-55-0). Las referencias numéricas entre paréntesis indican página o sección de esta obra.

1.- LA GEOMETRÍA DE LA COLISIÓN EN EL MODELO DE *Weaver y Brach*

La descomposición de la colisión en dos direcciones ortogonales, una dirección tangencial t , coincidente con la dirección del vector velocidad del centro de masa, y otra dirección normal a ésta n , permite plantear las ecuaciones de la variación de la cantidad de movimiento o impulso J , escrito de manera generalizada como $J_{id} = m_i \cdot (v'_{id} - v_{id})$, resulta:

$$\text{en el eje } n; \quad J_{1n} = m_1 \cdot (v'_{1n} - v_{1n}) \quad J_{2n} = m_2 \cdot (v'_{2n} - v_{2n}) \quad J_{1n} = J_{2n} = J_n$$

$$\text{en el eje } t; \quad J_{1t} = m_1 \cdot (v'_{1t} - v_{1t}) \quad J_{2t} = m_2 \cdot (v'_{2t} - v_{2t}) \quad J_{1t} = J_{2t} = J_t$$

Si denominamos *velocidad relativa normal* a la diferencia de velocidades normales:

$$v_{rn} = v_{1n} - v_{2n},$$

y llamamos a la primera velocidad de colisión o de deformación, pues como se ha visto, es el factor dinámico en el cálculo de la energía cinética disipada en el choque como trabajo de deformación. Y por otra parte denominamos *velocidad relativa tangencial* a la diferencia de velocidades tangenciales:

$$v_{rt} = v_{1t} - v_{2t}.$$

que resulta ser la velocidad de deslizamiento, y por lo tanto está asociada a la energía disipada como trabajo de fricción entre los vehículos, durante el lapso en que están en contacto.

Con el mismo criterio puede definirse también una velocidad relativa post impacto normal y una velocidad relativa post impacto tangencial. Sin embargo estas dos últimas no tienen ninguna utilidad y no serán citadas en adelante. De manera que el concepto de velocidad relativa sin aclaraciones, invoca siempre a la condición en que se inicia la colisión.

Una de las consecuencias más importantes de adoptar esta convención, es que en el eje normal n la colisión adopta la forma de colisión colineal con velocidad nula en el centro de masa. Ello implica que las velocidades de ambos vehículos, tanto al inicio como a la finalización de la colisión son de signo opuesto, por lo que considerando el valor absoluto de los módulos de velocidad, resultará algebraicamente $v_{rn} = v_{1n} + v_{2n}$ y $v'_{rn} = v'_{1n} + v'_{2n}$. Esta colisión deriva en las relaciones de restitución y la relación de energía, ya conocidas:

$$e_n = \frac{v'_{rn}}{v_{rn}} \quad 1 - e_n^2 = \frac{L_d}{E_d}$$

En ambos vehículos la deformación es producto de la velocidad relativa normal v_{rn} . Puede ser estimada mediante los criterios de *CRASH3*, *Prasad* y/o *Wood*, y analizada en detalle como un proceso dinámico. En consecuencia, las componentes normales v_{in} coinciden en módulo con los valores de velocidad equivalente de barrera *EBS*. A este análisis le son aplicables todas las deducciones y conclusiones del análisis de la colisión colineal (6.2). Y las consecuencias que derivan de esta propiedad son motivo del siguiente desarrollo.

Por otro lado, en la dirección tangencial, la disipación de energía cinética y la variación de cantidad de movimiento, se deben a la acción de la fuerza de fricción entre ambos cuerpos, debidas a un coeficiente μ_r . El análisis de *Weaver y Brach* para esta configuración, contiene como elementos adicionales los coeficientes p y r (4.2), incluyendo distintas formas de variación del fenómeno de fricción entre los vehículos.

Retomando el análisis, se puede deducir que el coeficiente r expresa la relación de variación de velocidad en la dirección t , respecto de la variación en la dirección de n . Y también la relación del valor medio de las fuerzas aplicadas en cada dirección durante el contacto. Ello se deduce de

la ecuación $r = \frac{J_t}{J_n} = \frac{m_1 \cdot \Delta v_{1t}}{m_1 \cdot \Delta v_{1n}} = \frac{F_t \cdot \Delta t_t}{F_n \cdot \Delta t_n} = \mu_r \cdot \frac{\Delta t_t}{\Delta t_n}$, donde F representa el valor medio de la fuerza aplicada durante la colisión. Δt es la duración de la colisión, en cada una de las direcciones respectivas. Salvo alguna condición anormal, la colisión en la dirección de t deberá durar lo mismo que en la dirección de n , y por lo tanto, en una gran cantidad de situaciones será $r = \mu_r$, cuyo valor natural debe ser ≤ 1 .

Como última derivación posible se puede escribir:

$$\Delta v_{1t} = \mu \cdot \Delta v_{1n} = \mu \cdot (1 + e_n) \cdot v_{1n}$$

El otro coeficiente singular es el cociente de velocidades relativas tangencial y normal. Este coeficiente se expresa como:

$$p = \frac{v_{1t} - v_{2t}}{v_{1n} + v_{2n}} = \frac{v_{rt}}{v_m}$$

Considerando las relaciones $m_1 \cdot v_{1n} = m_2 \cdot v_{2n}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{1t}}{v_{1n}}$ y $\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{2t}}{v_{2n}}$, y escribiendo la relación de masas como $m = \frac{m_2}{m_1}$ se puede reescribir como: $p = \frac{m \cdot \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{m + 1}$

Tanto r como p expresan una razón de oblicuidad, propia de la colisión bajo análisis. El coeficiente r , en tanto relación de impulso, puede ser caracterizado como el *índice dinámico de oblicuidad*. En tanto p es el cociente de las velocidades relativas de fricción y deformación, por lo que se lo denominará *índice cinemático de oblicuidad*. El valor nulo de ellos estaría indicando un choque colineal (o cuasi-colineal, si fueran valores muy pequeños).

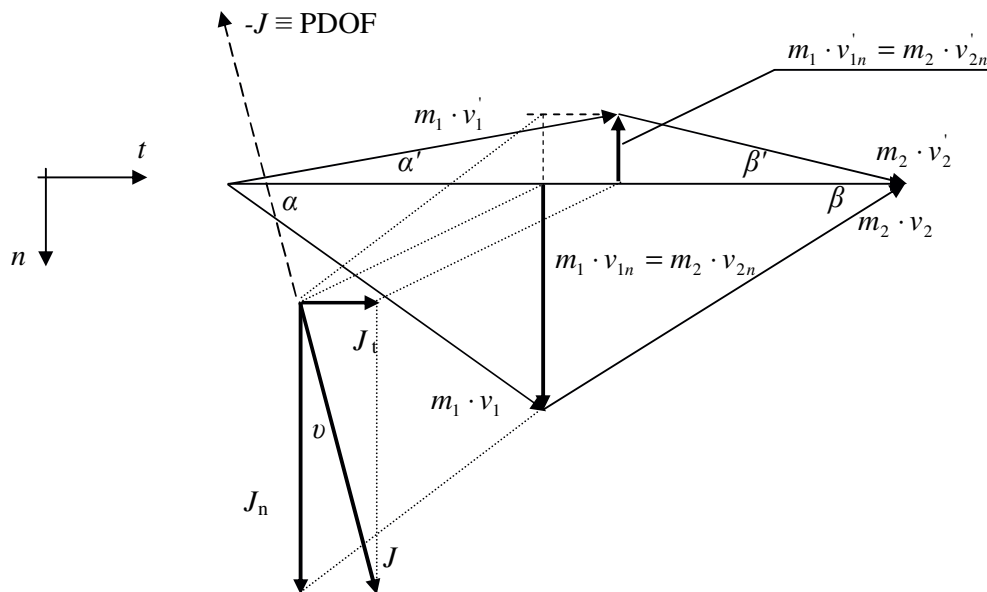


Fig 1 –Representación gráfica de la colisión oblicua

Para comprender el significado de estos índices y darles una aplicación práctica, vamos primero a representar de una manera particular el diagrama vectorial de la colisión (Figura I). Para ello adoptamos como eje horizontal el vector cantidad de movimiento del centro de masa. Por encima

de él dibujamos los vectores de cantidad de movimiento post impacto, y por debajo los de preimpacto. Se obtienen así dos triángulos con un lado común, cuya longitud es el módulo de la suma vectorial de los vectores que se representan en los otros lados de ambos triángulos.

En esta configuración se puede observar e identificar a los vectores J_n y J_t , como diferencias de los vectores cantidad de movimiento pre y post impacto correspondientes, en las direcciones $[n:t]$. En este caso, la relación entre impulso tangencial e impulso normal $r = J_t / J_n$ es la tangente el ángulo v que forma el vector J_n con el vector J . Este ángulo pone de manifiesto el grado de oblicuidad en el sistema de coordenadas $[n:t]$.

Los términos J_t y J_n son las componentes del vector $J = m(\vec{v} - \vec{v}')$, y por lo tanto r como tangente del ángulo v , determina la dirección de ese vector impulso J . El impulso, como consecuencia de su equiparación con el vector variación de la cantidad de movimiento, nos muestra la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas. Esta dirección es conocida en el ámbito de la reconstrucción de colisiones, por la sigla PDOF (por la expresión en inglés *Principal Direction of Force*). La dirección PDOF y el coeficiente r indican como ya se ha dicho, el grado de oblicuidad de la colisión.

Salvo alguna condición particular muy poco frecuente, la dirección PDOF es en general normal al plano principal de la deformación en cada vehículo. En el caso de colisiones polares con postes, columnas o elementos agudos, coincide con la dirección de progresión en profundidad de la deformación. Esa dirección se puede identificar en los rastros, observando cuidadosamente los vehículos colisionados y su deformación, y estimar el valor del ángulo que forman con el eje principal de cada uno de ellos.

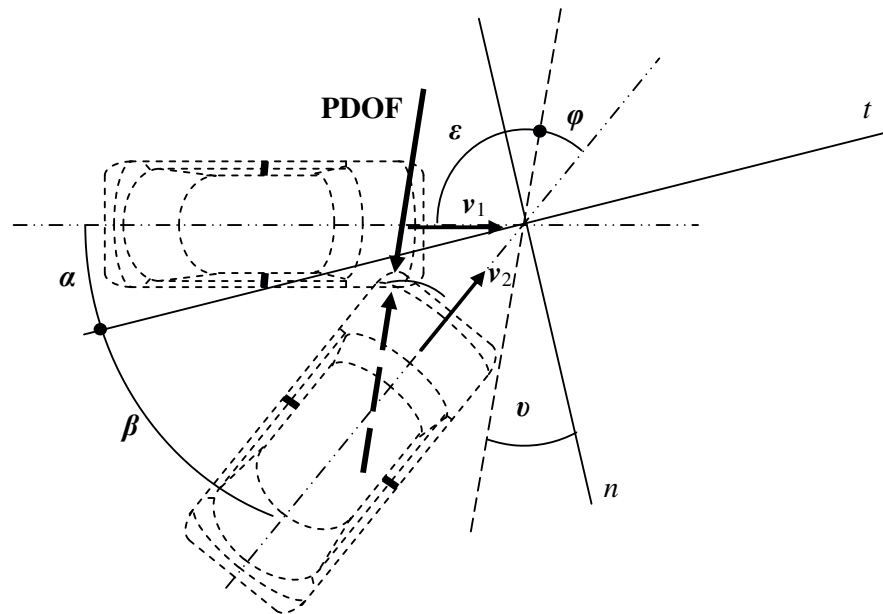


Fig II – Dirección $v = \text{arc tg}(r)$ y PDOF

Los ángulos ε y φ que forman la dirección de la PDOF con el eje X de cada uno de los vehículos, se pueden relacionar con los ángulos α y β que define las direcciones de colisión en el sistema de referencia dado por los ejes $[n:t]$. El análisis de los ángulos mencionados conduce a las ecuaciones $\varepsilon = \pi/2 - \alpha + v$ y $\varphi = \pi/2 - \beta - v$

2.- ENERGIA DISIPADA EN LA COMPONENTE NORMAL DE LA COLISION

Debido a que en la dirección n la componente equivale a una colisión colineal cuya velocidad del centro de masa es nula, cada una de las magnitudes de las componentes de velocidad normal coincide con el módulo de la velocidad equivalente de barrera respectiva EBS_i . Como es sabido, este valor característico de la deformación producida en el choque está asociado a la magnitud de esa deformación. Se puede escribir:

$$v_{1n} = v_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha = EBS_1 \quad \text{y} \quad v_{2n} = v_2 \cdot \operatorname{sen} \beta = EBS_2.$$

En consecuencia, en la dirección normal resultará:

$$m_1 \cdot v_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha = m_2 \cdot v_2 \cdot \operatorname{sen} \beta \quad \text{de donde resulta} \quad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 \cdot v_1} = m \cdot v$$

donde m es la relación de masas, y v la relación de velocidades preimpacto. Análogamente resultará:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \beta'} = \frac{m_2 \cdot v_2'}{m_1 \cdot v_1'} = m \cdot v'$$

Para ángulos hasta 15° el argumento coincide con el seno y con la tangente². Se puede escribir

$$\text{entonces} \quad \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \beta'} = \frac{\alpha'}{\beta'} = m \cdot v'$$

Por la característica de velocidad del centro de masa nula, el coeficiente de restitución resulta:

$$e_n = \frac{v_m'}{v_m} = \frac{v_{2n}' + v_{1n}'}{v_{1n} + v_{2n}} \quad \text{y como} \quad v_{2n} = \frac{m_1}{m_2} v_{1n} = \frac{1}{m} v_{1n} \quad \text{y} \quad v_{2n}' = \frac{1}{m} v_{1n}'$$

$$\text{reemplazando y operando resultará}^3 \quad e_n = \frac{v_{1n}'}{v_{1n}} = \frac{v_{2n}'}{v_{2n}}$$

Escribiendo ahora la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección t :

$$m_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + m_2 \cdot v_2 \cdot \cos \beta = m_1 \cdot v_1' \cdot \cos \alpha' + m_2 \cdot v_2' \cdot \cos \beta'$$

$$\text{en la que dividiendo por } m_1 \cdot v_1 \text{ queda} \quad \cos \alpha + m \cdot v \cdot \cos \beta = \frac{v_1'}{v_1} \cdot \cos \alpha' + m \cdot \frac{v_2'}{v_1} \cdot \cos \beta'$$

$$\text{Se tiene además que} \quad e_n = \frac{v_1' \cdot \operatorname{sen} \alpha'}{v_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha} \quad \text{de donde} \quad \frac{v_1'}{v_1} = e_n \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'}; \text{ y } v_2' \cdot \operatorname{sen} \beta' = e_n \cdot v_2 \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{dividiendo ahora ambos términos por } v_1, \text{ resulta} \quad \frac{v_2'}{v_1} = v \cdot e_n \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta'}$$

² En el ángulo de 10° , equivalente a 0,1745 radianes, el seno es 0,1736 y la tangente es 0,1763, con diferencias dentro del 1%. En 15° estos valores son respectivamente 0,2618, 0,2588 y 0,2679, con un error menor al 1,2% en el seno

³ El valor de e expresado cuando la velocidad del centro de masas es alcanzada por los dos móviles (inversión del sentido de la velocidad relativa post impacto) es siempre positivo adoptando la convención de signos (4.15). Sin embargo hay excepciones, como los casos de golpe de refilón (*side swipe*) y colisiones doblemente excéntricas (*corner-to-corner*), donde la velocidad final del colisionante es mayor aún que la del colisionado, por lo que el valor de restitución puede tener signo negativo. Esto implica rotaciones de significancia que excluyen la simplificación de masa puntual.

Además resulta $tg\alpha' = \frac{v_{1t}'}{v_{1n}'}$ y $tg\beta' = \frac{v_{2t}'}{v_{2n}'}$. Reemplazando en la ecuación general, considerando la tangente igual al argumento para ángulos pequeños, y ordenando, se podrá escribir entonces:

$$\cos\alpha + m \cdot v \cdot \cos\beta = e_n \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha'} + e_n \cdot m \cdot v \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\beta'}$$

De esta ecuación compactada se podrán derivar dos relaciones importantes. La primera el coeficiente de restitución:

$$e_n = \frac{\cos\alpha + mv \cdot \cos\beta}{\frac{\text{sen}\alpha}{\alpha'} + mv \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\beta'}}$$

Otra forma de derivar nos lleva a la relación de velocidades:

$$v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{e_n \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha'} - \cos\alpha}{\cos\beta - e_n \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\beta'}}$$

Sucede que también resulta $\frac{EBS_2}{EBS_1} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{v_2 \cdot \text{sen}\beta}{v_1 \cdot \text{sen}\alpha} = v \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$; por lo que puede escribirse entonces:

$$\frac{EBS_2}{EBS_1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{e_n \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha'} - \cos\alpha}{\cos\beta - e_n \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\beta'}} \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$$

Y como en general resulta $L_{di} = \frac{1}{2} m_i \cdot EBS_1^2 \cdot (1 - e_n^2)$, se puede escribir la relación entre las magnitudes de energía cinética convertidas en trabajo de deformación como

$$\frac{L_{d2}}{L_{d1}} = m \cdot \left(\frac{EBS_2}{EBS_1} \right)^2$$

3.- PARÁMETROS RELEVANTES DE LA COLISIÓN OBLICUA

Uno de los errores más frecuentes en la reconstrucción de colisiones oblicuas de masas puntuales, es dar por conocido el ángulo post colisión $\delta' = \alpha' + \beta'$ que forman los vectores velocidad de ambos vehículos en el instante final del contacto, asociándolos al punto de reposo y la línea que une ellos con el punto de impacto. Ello no es cierto; el ángulo real post colisión es, en general, mucho menor al ángulo de las trayectorias resultantes de unir el punto de impacto y los puntos de reposo.

Demostraremos que el ángulo δ' depende de las relaciones de masa y de velocidad post impacto $[m \cdot v']$. Para ello analizaremos las características que guardan entre sí los ángulos post colisión entre sí, y con los ángulos de colisión.

En primer lugar recordamos que el cociente entre α' y β' es también el producto $[m \cdot v']$. De allí se obtienen las relaciones:

$$\beta' = \frac{\delta'}{1 + mv'} \quad \text{y} \quad \alpha' = \left(1 - \frac{1}{1 + mv'}\right) \cdot \delta'.$$

Por otro lado, las ecuaciones generales de conservación establecen que existe una relación estricta entre los ángulos α , α' , β y β' , que se puede establecer a partir de las ecuaciones siguientes:

$$EBS_1 = v_{1n} = v_1 \cdot \text{sen} \alpha, \text{ de donde resulta } v_1 = \frac{EBS_1}{\text{sen} \alpha} \text{ y } v_1 \cdot \cos \alpha = \frac{EBS_1}{\text{tg} \alpha}.$$

$$\text{Análogamente resulta } v_2 = \frac{EBS_2}{\text{sen} \beta} \text{ y } v_2 \cdot \cos \beta = \frac{EBS_2}{\text{tg} \beta}$$

$$\text{Además } e_n \cdot EBS_1 = v'_{1n} = v'_1 \cdot \text{sen} \alpha' \text{ de donde } v'_1 = e_n \cdot \frac{EBS_1}{\text{sen} \alpha'} \text{ y } v'_1 \cdot \cos \alpha' = e_n \cdot \frac{EBS_1}{\text{tg} \alpha'}.$$

$$\text{y } v'_2 = e_n \cdot \frac{EBS_2}{\text{sen} \beta'} \text{ y } v'_2 \cdot \cos \beta' = e_n \cdot \frac{EBS_2}{\text{tg} \beta'}.$$

Reescribiendo la ecuación de conservación de movimiento en el eje t

$$m_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + m_2 \cdot v_2 \cdot \cos \beta = m_1 \cdot v'_1 \cdot \cos \alpha' + m_2 \cdot v'_2 \cdot \cos \beta'$$

$$\text{como } m_1 \cdot \frac{EBS_1}{\text{tg} \alpha} + m_2 \cdot \frac{EBS_2}{\text{tg} \beta} = m_1 \cdot \frac{e_n \cdot EBS_1}{\text{tg} \alpha'} + m_2 \cdot \frac{e_n \cdot EBS_2}{\text{tg} \beta'},$$

y por cuanto $m_1 \cdot EBS_1 = m_2 \cdot EBS_2$, se resume en

$$\frac{1}{\text{tg} \alpha} + \frac{1}{\text{tg} \beta} = e_n \cdot \left(\frac{1}{\text{tg} \alpha'} + \frac{1}{\text{tg} \beta'} \right)$$

que expresa una relación unívoca de ángulos de colisión y post colisión para un dado grado de restitución normal.

Resumiendo con el símbolo C_{ct} el módulo del vector cantidad de movimiento del centro de masa de la colisión $[C_{ct} = m_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + m_2 \cdot v_2 \cdot \cos \beta = m_1 \cdot v'_1 \cdot \cos \alpha' + m_2 \cdot v'_2 \cdot \cos \beta']$, la forma simplificada de conservación en el eje t puede adoptar la expresión:

$$\frac{1}{\text{tg} \alpha} + \frac{1}{\text{tg} \beta} = \frac{C_{ct}}{m_1 \cdot EBS_1} = K,$$

Sabiendo que $\beta = \delta - \alpha$, incluyendo la expresión desarrollada de la tangente de la diferencia, factoreando y ordenando queda una ecuación de segundo grado siguiente:

$$\left(\frac{K}{\text{tg} \delta} + 1 \right) \cdot \text{tg}^2 \alpha - K \cdot \text{tg} \alpha + 1 = 0,$$

cuyas raíces, son las tangentes de los ángulos α y β respectivamente. Por lo tanto, resulta:

$$[\alpha; \beta] = \arctg \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4 \cdot \left(\frac{K}{\operatorname{tg} \delta} + 1\right)}}{2 \cdot \left(\frac{K}{\operatorname{tg} \delta} + 1\right)}$$

El valor K adquiere un valor mínimo cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \delta$ con lo que $K_{\min} = 2 \cdot \cot g \left(\frac{\delta}{2} \right)$. Este límite marca el extremo del máximo ángulo α ó β admisibles como solución, para una dada combinación de cantidad de movimiento del centro de masa y del producto $[m_1 \cdot EBS_1]$.

4.- LA RECONSTRUCCION DE COLISIONES OBLICUAS

El desarrollo anterior nos indica los parámetros físicamente posibles de las direcciones de los vectores respecto al eje principal t . Estas direcciones deben a su vez ser compatibles con algunos de los elementos que se encuentran dentro del rango de velocidad post impacto.

En general no se cometen errores insalvables al estimar el módulo de velocidad post impacto de los vehículos. Empleando alguno de los métodos de análisis del movimiento descontrolado se pueden obtener rangos posibles los valores de v'_i (sección 3). De igual modo se podrá relacionar la deformación con una velocidad equivalente de barrera, y ésta con el coeficiente de restitución y con el ángulo post colisión. Para ello se deberá recordar que:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{v'_{1n}}{v_1} = e_n \cdot \frac{EBS_1}{v_1} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta' = \frac{v'_{2n}}{v_2} = e_n \cdot \frac{EBS_2}{v_2} = \frac{e_n}{m} \cdot \frac{EBS_1}{v_2}$$

Los capítulos precedentes se han limitado a considerar solo la colisión normal a través de los parámetros EBS y e_n . Veamos como puede relacionarse el coeficiente de restitución tangencial e_t con los ángulos y la relación de masas.

$$\text{Por definición resultará} \quad e_t = \frac{v'_{2t} - v'_{1t}}{v_{1t} - v_{2t}} = \frac{v_2 \cdot \cos \beta' - v_1 \cdot \cos \alpha'}{v_1 \cdot \cos \alpha - v_2 \cdot \cos \beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por el valor de v_1 , quedará:

$$e_t = \frac{\frac{v_2}{v_1} \cdot \cos \beta' - \frac{v_1}{v_1} \cdot \cos \alpha'}{\cos \alpha - v \cdot \cos \beta}$$

$$\text{Dado que } e_n = \frac{v_2 \cdot \operatorname{sen} \beta'}{v_2 \cdot \operatorname{sen} \beta} \text{ y } v_2 = v \cdot v_1, \text{ se puede escribir } \frac{v_2}{v_1} \cdot \cos \beta' = e_n \cdot v \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{tg} \beta'}$$

$$\text{Análogamente, y como también } e_n = \frac{v_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha'}{v_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha}, \text{ resulta } \frac{v_1}{v_1} \cdot \cos \alpha' = e_n \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

De manera que reemplazando y agrupando quedará:

$$e_t = e_n \cdot \frac{\frac{\text{sen}\beta}{\text{tg}\beta'} \cdot v - \frac{\text{sen}\alpha}{\text{tg}\alpha'}}{\cos\alpha - v \cdot \cos\beta} \quad \text{que para ángulos pequeños resulta } e_t = -e_n \cdot \frac{\frac{\text{sen}\alpha}{\alpha'} - v \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\beta'}}{\cos\alpha - v \cdot \cos\beta}$$

Y en tanto se puede escribir $v = \frac{1}{m} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$, reemplazando, agrupando y simplificando queda:

$$e_t = -e_n \cdot \frac{\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{m \cdot \beta'}}{\frac{1}{\text{tg}\alpha} - \frac{1}{m \cdot \text{tg}\beta}}$$

En conclusión; las relaciones encontradas marcan los límites de factibilidad de las estimaciones realizadas en torno al movimiento post impacto, y los márgenes de compatibilidad con la relación de impacto.

5.- EL PROCESAMIENTO DEL CÁLCULO

Es obvio que este modelo es lo suficientemente complejo y laborioso de procesar de manera manual. La mayoría de las ecuaciones requieren de procesos de iteración de cierta complejidad para ajustar resultados; inevitablemente habrá que acudir al auxilio de la computadora.

Dentro de las disponibilidades informáticas, el modo más consistente y a la vez más transparente a los ojos del investigador forense, es el uso de utilitarios comerciales como son las planillas de cálculo; éstas permiten ir desbrozando cada una de las partes del análisis, obtener resultados parciales, y elegir caminos particulares. Un procedimiento de cálculo que en primera instancia devuelva los resultados como un racimo de soluciones, le da al investigador pautas acotadas para ajustar esos resultados a las condiciones, que sólo el propio investigador puede establecer como las que se corresponden mejor con las condiciones de contorno del problema investigado.

Con este criterio es que hemos desarrollado –actualmente estamos en la fase de desarrollo experimental-, la planilla de cálculo **OBLIQUUS'15**. Se trata de una herramienta avanzada de cálculo para el análisis de la colisión oblicua de masas puntuales, con una restricción a la relación de masa, la que no puede ser superior a 2,0 ni inferior a 0,5. Esta limitación la torna útil para reconstruir colisiones de automóviles entre sí, incluyendo pequeños camiones y microbuses, y de motocicletas entre sí. No es apta para vehículos de gran porte, especialmente articulados, ni para colisiones de motocicletas con automóviles.

Esta planilla de cálculo, diseñada como una herramienta interactiva con el operador, demanda la introducción del rango posible de energía disipada por deformación en uno de los vehículos, el ángulo de colisión y los rangos posibles de velocidades lineales post colisión. Con estos datos y la relación de masas, se estiman rangos de energía disipada en el segundo vehículo, coeficientes de restitución normal, por un lado, y ángulos post colisión físicamente compatibles con los datos ingresados por el otro. En primera instancia devuelve como cuadro de resultados, ocho combinaciones de valores de velocidades pre y post impacto, ángulos de trayectorias y ángulos de deformación resultante. Para cada tipo de datos hay un par de resultados que expresan los

extremos del rango posible en cada caso, lo que permite seleccionar el par que mejor se ajusta a los rastros relevados.

Como modo de ajuste la planilla de cálculo **OBLIQUUS** incluye una segunda hoja **simulador**, en la que ingresando como datos la velocidad, ángulo pre y post impacto de un vehículo, se calculan los valores correspondientes en ese mismo rodado y en su antagonista, identificado solamente por la masa. Con este recurso se pueden explorar distintas alternativas dentro del rango elegido, y conocer en cada caso características particulares de la colisión simulada como energía disipada, coeficientes de restitución, velocidades y ángulo post colisión, y ángulos de deformación. Utilizando con paciencia esta herramienta, y no apartándose en mucho del rango acotado en **OBLIQUUS** es posible acercarse tanto como uno quiera a un conjunto de resultados que mejor aproxime a los rastros y la evidencia construida a partir de los mismos

En ambos casos las herramientas operan desde la colisión, empleando los principios conservativos de la misma, condensados en el criterio del *antagonista desconocido* (6.31). Por ello es posible su operación conociendo datos detallados de uno de los protagonistas, y algunos rasgos generales del otro. En caso de que se tenga una cabal noción de los daños en el segundo vehículo, y se pueda estimar con precisión algunos de las propiedades requeridas como datos, el rango estimado será más cerrado y confiable. Pero aún sin ellos, es posible obtener resultados de muy buena precisión.

Dado que esta herramienta se encuentra en la fase de experimentación intensiva, el autor agradece su interés en esta tarea, y le ofrece su colaboración para aplicarla en algún caso donde sea posible hacerlo. Para ello debe escribirnos a agarcia@perarg.com.ar y enviarnos los rastros relevados (croquis, fotografías, etc.). Con gusto nos abocaremos al tema y le ofreceremos de manera desinteresada los mejores resultados que creamos posible obtener, junto con la planilla procesada y su instructivo

Buenos Aires, febrero 2015 – marzo 2017 -----