MOMENTOS DE INERCIA PARA USO PRACTICO EN RECONSTRUCCIÓN DE ACCIDENTES

Ernesto N. Martínez
Centro Atómico Bariloche, CNEA
Instituto Balseiro, U.N. Cuyo
8400 Bariloche
e-mail: emartine@cab.cnea.edu.ar
Mayo de 1997

Resumen
Se examina la física de los giros y su importancia en la reconstrucción de accidentes viales. Se desarrolla un modelo simple de un auto que permite calcular el momento de inercia para guiñadas I_{zz} a partir de datos fácilmente accesibles, se lo compara con la base de datos de parámetros inerciales de vehículos de la National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) de los EEUU, y se concluye que los valores obtenidos son suficientemente aproximados para la reconstrucción accidentológica normal: en todos los casos conocidos el error es menor del 15%, y es menor del 10% en general. Se da un programa simple en BASIC que permite calcular momentos de inercia en cualquier computadora personal.

1. INTRODUCCION

La física es la ciencia básica en la reconstrucción de accidentes viales. Esto no significa que reconstruir una accidente sea un mero ejercicio de física aplicada: otros campos del saber, desde la psicología experimental hasta la medicina, sin olvidar el sentido común, son irremplazables a la hora de determinar qué pasó en la ruta. Pero la causa inmediata de los daños y heridas que se investigan son siempre fuerzas. Las fuerzas y sus efectos son el andamiaje sobre el cual se ordenan datos y conclusiones. Y la descripción matemática de los efectos que producen dadas fuerzas es precisamente el programa original de la física newtoniana.

La aplicación de aquella parte de la física newtoniana que trata de los cambios del momento lineal n parece ofrecer mayores problemas, y en los casos que se limitan a traslaciones los encargados de reconstruir accidentes llegan a resultados cuantitativos con una firme base teórica.

En mi experiencia, no pasa lo mismo en los sucesos que involucran giros o trompos: en estos casos se suele recurrir a argumentos puramente cualitativos, a menudo demostrados kinestésicamente, y se cae en argumentos precientíficos, como han demostrado numerosas investigaciones publicadas [1, 2, 3, 4, 5]. Cuando se intentan planteos cuantitativos, los resultados suelen ser erróneos.

No es extraño que esto ocurra. La física de los giros es, en la práctica mucho más compleja que la de las traslaciones. Las razones son múltiples. Vayan tres botones de muestra: las rotaciones en tres dimensiones constituyen, a diferencia de las traslaciones, un grupo no-conmutativo; su descripción a través de ángulos de Euler es engorrosa; los efectos inerciales están representados, no por un simple escalar, sino por un tensor.

Y, como si todo esto fuera poco, **no conocemos los valores reales de los momentos de inercia de los vehículos que andan por la calle.**

Un tratamiento de los tres primeros puntos excede con mucho el marco de una comunicación como esta, pero el cuarto tema, el valor numérico del momento de inercia de un auto, se puede tratar aquí con provecho.

A diferencia del peso en orden de marcha de un auto, que figura en todos los folletos y hojas técnicas, los momentos de inercia del mismo vehículo son incógnitas. En este artículo explico cómo calcular, a partir de los datos numéricos que sí figuran en cualquier hoja de especificaciones técnicas, una buena aproximación al momento de inercia respecto a un eje vertical que pasa por el centro de masa del auto. Explico cuál es el fundamento físico de la fórmula de interpolación que usaré, en qué sentido mejora el valor predictivo de otras expresiones, y cuál es el rango de error esperado. A lo largo del trabajo, presento la bibliografía más actual sobre el problema.

El programa de BASIC que figura al final de este artículo incorpora esta fórmula. El programa, que corre en cualquier PC, pide los datos necesarios, los corrige o advierte al usuario de posibles errores, sobre todo en las unidades usadas, suministra las mejores aproximaciones estadísticas para datos faltantes, y entrega la mejor estimación del momento de inercia I_{zz}.

2. ROTACION Y MOMENTOS DE INERCIA

Así como un cuerpo que se desplaza tiene un momento lineal, dado por el producto de su velocidad por su masa, que se conserva en ausencia de fuerzas exteriores, un cuerpo que rota con una velocidad angular ω tiene un *momento angular*, que también se conserva en ausencia, ahora, de cumplas exteriores.

La velocidad angular es un vector[1], $\vec{\omega}$: su módulo está dado por la rapidez de giro, y su dirección por la del eje instantáneo de rotación, usando una convención conveniente, la del sacacorchos.

El momento angular también es un vector, como el momento lineal. Se lo denota usualmente $\vec{L}$, y, al igual que el momento lineal, es proporcional a la velocidad respectiva, en este caso la angular

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \tag{1}$$

Veamos que la constante de proporcionalidad, I, juega aquí el mismo papel que la masa del objeto en el momento lineal. Se la llama *momento de inercia*, y condensa las propiedades dinámicas del objeto que interesan cuando se lo hace rotar. Es desafortunado que se llame *momento* tanto al angular como al de inercia, pero a esta altura ya no se puede hacer gran cosa.

El momento de inercia es más complicado matemáticamente que la masa: mientras que esta es un *escalar*, es decir que se puede representar por un número real (y una dimensión), el momento de inercia es lo que se llama un *tensor*, un ente matemático que aplicado a un vector da otro vector. Mientras que la masa también hace eso (el vector que resulta al multiplicar velocidad por masa, el momento lineal, es siempre paralelo a la velocidad lineal), el momento de inercia lo hace de manera más complicada: el momento angular no necesita ser paralelo a la velocidad angular.

La diferencia principal entre estos dos parámetros dinámicos, masa y momento de inercia, es que mientras la masa es la misma para *cualquier* clase de transalción[2], el momento de inercia depende radicalmente de cuál rotación se describa. Esto ya basta para mostrar que la Física de las rotaciones es más difícil y sutil que la de las translaciones.

El momento de inercia se puede representar por una matriz. Si usted necesita refrescar estos temas, lo mejor que puede hacer es leer el tomo Y del libro *Física* de Feynman, Leighton y Sands (6), o cualquier tratado de mecánica racional (7).

Se puede probar que todo cuerpo rígido tiene tres ejes, mutuamente perpendiculares, llamados *principales*, tales que si se usan como ejes de referencia, esta matriz es diagonal, o sea que sus elementos no diagonales son nulos (7). Las rotaciones alrededor de estos ejes principales queda limitadas a ellos. En este caso, el comportamiento del objeto al rotar se puede describir por tres números, los momentos de inercia respecto a los tres ejes. No es de extrañarse que haya aquí más de un número: es más difícil hacer girar una varilla alrededor de su eje transversal, que alrededor del longitudinal.

El momento de inercia de una distribución de N masas m_i, donde i y es un índice que las identifica, respecto a una eje, está dado por la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de su distancia el eje de rotación. Por ejemplo, si el eje de rotación es el eje z, el momento de rotación respecto a él es:

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{2}$$

El hecho de que se usen dos zetas para designar el momento de inercia alrededor del eje z provienen de la forma matricial original del tensor de inercia.

La ecuación de movimiento que describe la variación del momento angular $\vec{L}$ al aplicarle una cupla $\vec{\tau}$ (por supuesto, las cuplas también tienen carácter vectorial) es

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{\tau}. \tag{3}$$

Por supuesto, el momento de inercia es tanto más útil si es constante: en lo que se llama técnicamente un *cuerpo rígido*, la disposición relativa de las masas, o sea la forma, no varía, y los momentos de inercia son efectivamente constantes. Entonces

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d}{dt}(\vec{\omega}) = I\dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}, \tag{4}$$

y la cupla aplicada se traduce directamente en un cambio de velocidad angular.

Desde el punto de vista accidentológico que nos interesa, las cuplas debidas a una colisión inducen velocidades de rotación que pueden ser calculadas con esta fórmula, y también se puede calcular, usándola, cómo se frena un trompo por fricción.

Hay casos en que el momento de inercia puede variar. Así, los patinadores sobre hielo y los gatos, por citar los dos ejemplos más remanidos, varían su forma para cambiar a piacere su momento de inercia, y por lo tanto su velocidad angular, manteniendo todo el tiempo su momento angular constante, pues lo hacen sin que se apliquen fuerzas externas.

Basta con la definición 2 para darse cuenta de dos propiedades del momento de inercia: es siempre positivo, y el momento de inercia de la suma de dos cuerpos es la suma de sus respectivos momentos de inercia, *siempre que se tomen respecto al mismo eje*. Recuerde que un momento de inercia no tiene sentido por sí solo, si no se especifica el eje respecto al cual se lo mide. En la sección 3.3 hablaremos más sobre este punto.

3. GIROS DE UN AUTO

El comportamiento inercial de un auto ante giros está determinado por tres momentos de inercia independientes. Cada uno de ellos se aplica a giros alrededor de tres ejes mutuamente perpendiculares, tal como ilustra la figura 1.

Los giros alrededor del eje longitudinal del vehículo , X, se llaman *rolidos*. Pueden ser críticos en camiones cargados, que en ciertas circunstancias se balancean lateralmente, a veces con consecuencias desastrosas (8).

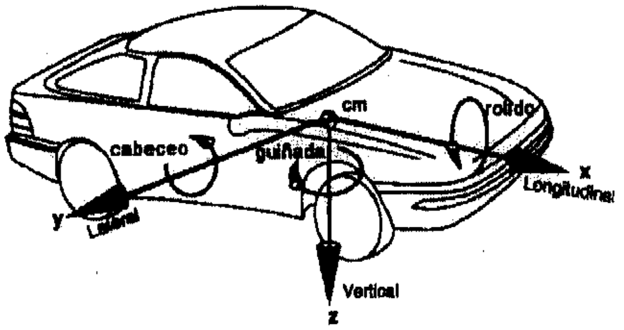
Cuando son alrededor de un eje horizontal transversal al vehículo, **Y**, los giros se llaman *cabeceos*. Se dan a menudo: las huellas de frenada interrumpidas que se suelen ver en las rutas, formadas por trazos repetidos de rayada negra de un par de metros, separadas por tramos limpios de aproximadamente el mismo largo, son la marca de un vehículo que ha entrado en un movimiento de cabeceo. Es común que este vehículo sea un acoplado vacío o con poca carga, aunque he tenido ocasión de medir y usar esta clase de huellas producidas por un ómnibus cargado, y por un Peugeot 405. En todos los casos la oscilación de cabeceo había sido causada por una frenada brusca.

Al considerar los trompos de un vehículo, los giros que importan son alrededor del eje vertical, el eje Z. Estos giros se denominan *guiñadas*. La magnitud física que rige la respuesta inercia del vehículo en una guiñada es el momento de inercia I_{zz}.

Figura 1: *Los tres ejes principales de un auto, y los nombres de los giros alrededor de cada uno de ellos.*

1 Estrictamente, es un seudovector, pero eso no viene al caso aquí.

2 Siempre que el movimiento no sea relativista, es decir que la velocidad del móvil sea mucho menor que la luz, 300000 Km/s. Estos casos no se presentan en la Física forense, pero no porque a los conductores les falten ganas.



Para calcular las aceleraciones de un cuerpo ante la acción de fuerzas conocidas es *imprescindible* conocer su masa. Un ratón y un elefante difieren en muchos aspectos, pero para la física newtoniana, toda la diferencia está en la masa.

De la misma manera, es imposible trabajar con la dinámica de los giros si no se conocen los momentos de inercia pertinentes. En ellos está contenida toda la información necesaria. El problema práctico es que estos momentos de inercia no figuran en la información que nos suministran los fabricantes de autos, mientras que la masa sí, bajo el nombre de "peso en orden de marcha".

3.1. COMO CALCULAR MOMENTOS DE INERCIA

Si no nos los dan, hay que calcularlos. Por supuesto, no se pueden esperar resultados exactos, pero veremos que el error será pequeño, y es factible tratar los giros con una precisión tolerable para las necesidades de la reconstrucción de accidentes. Me limitaré aquí a las guiñadas, u por lo tanto al momento de inercia I_{zz}.

No conozco una recopilación de datos que trate del I_{zz} de los autos que circulan en nuestro país. Tampoco la hay de propiedades elásticas; la falta se debe probablemente a la escala reducida del mercado, y también a que no se fabrican diseños propios.

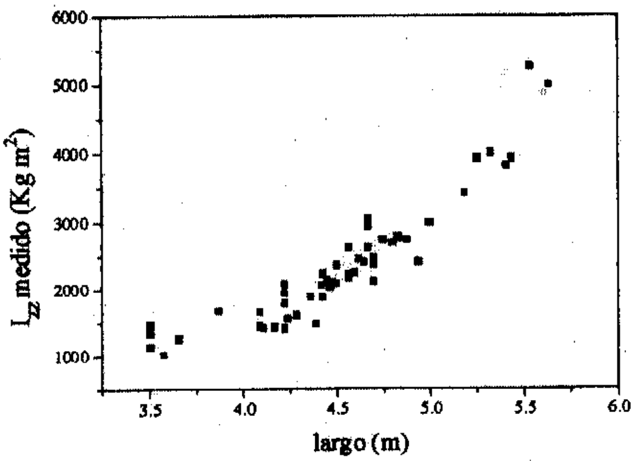


Figura 2: *Momentos de inercia respecto a un eje vertical que pasa por el centro de masa, medidos experimentalmente, en función de la longitud del auto, para 59 autos de la lista de la NHTSA recopilada por Garrott.*

Sí existe una recopilación de parámetros inerciales de vehículos publicada en 1993 por W. Reley Garrott, de la *National Highway Traffic Safety Administration*, la oficina nacional para la seguridad en el tránsito en las rutas de EEUU (9). Esta recopilación comprende de los resultados de 356 pruebas realizadas en los laboratorios de la NHTSA hasta setiembre de 1992.

Estas pruebas han sido hechas con el Instrumento para la Medición de Parámetros Inerciales (IPMD, en inglés), construido por la NHTSA en 1986 (10).

Los vehículos estudiados son livianos: van desde autos pequeños hasta pickups y utilitarios. El estudio experimental de Curzon, Cooperrider y Limbert (11) está limitado a pickups y utilitarios livianos. En el estudio yo me restringiré, por mi parte, a autos de uso familiar. De la recopilación de la NHTSA mencionada arriba he extraído los datos para 59 autos. Comprenden tanto sedanes de 4 y 2 puertas, como autos de dos volúmenes, de 3 y 5 puertas. Los datos de la lista incluyen el largo total, el peso, la distancia entre ejes, ambas trochas (pero no el ancho total), la posición del centro de masa del vehículo respecto al eje delantero, y el momento de inercia I_{zz}, llamado de *yaw*, guiñada en inglés. Este momento de inercia está medido alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de masa del vehículo.

El peso y el momento de inercia han sido medidos para autos vacíos en la mayoría de los casos, pero en algunos ensayos incluyen de uno a cinco ocupantes. En todos los casos, el tanque de combustible estaba lleno al medir.

La figura 2 muestra los momentos de inercia I_{zz}, expresados en Kg m2, en función de las longitudes totales de los autos.

Esta figura muestra que la relación entre longitud y momento de inercia es ruidosa, y no es lineal. De hecho, si se representan los valores de la figura 2 en un gráfico doble logarítmico, y se usan cuadrados mínimos para hallar la recta que mejora ajusta a los puntos experimentales, se encuentra que

$$I_{zz} = 18.9 \times (\text{largo})^{2.512} \qquad (5)$$

una expresión que bien podría usarse para calcular momentos de inercia, usando sólo el largo total del auto.

Si bien esta aproximación es razonable en la tendencia general, admite grandes errores en casos especiales, errores que llegan hasta 40% por exceso y 25% por defecto. Así pues, hay que concluir que esta aproximación puede servir tal vez para discutir tendencias generales en el comportamiento inercial de los autos, pero si se le quiere aplicar a la reconstrucción de accidentes, todos ellos casos especiales, es deficiente.

La aproximación anterior es puramente matemática, no hay física detrás de ella. El que no sea muy buena probablemente tiene algo que ven con esto. En efecto, sería esperar mucho que bastara con saber el largo total de un auto para poder calcular su momento de inercia. Es muy probable que algunas, o todas, de las variables incluídas en la lista de la NHTSA, sean relevantes y determinen el I_{zz}. En realidad, como estas variables son todas globales, es más que probable que no alcancen para determinar el momento de inercia, pues este depende de la distribución detallada de todas las partes del auto.

3.2 MODELOS FISICOS DE UN AUTO

Aún sin conocer la distribución detallada de masa, podemos imaginas cuáles son las variables más relevantes, sabemos cómo está hecho un auto, y podemos hacer modelos racionales.

El modelo más sencillo de un auto es el de partícula puntual, cuya única característica física es su masa. Es adecuado y útil al tratar ciertos choques, cuando los giros no importan.

El siguiente modelo, un poquito más complejo, es asignarle una forma. Visto desde arriba, un auto es un rectángulo. La masa no está concentrada en un punto, sino distribuída en un rectángulo. Supongamos que esté distribuída uniformemente, es decir que nuestro modelo del auto es una tabla rectangular, un ladrillo. Tiene largo L, ancho A, y masa total M. Esta masa incluye la masa (estimada) de los ocupantes. Como la distribución de masa es uniforme, el centro de masa del auto está situado exactamente en su centro geométrico.

Aquí no aparece z, la altura del auto. Lo que pasa es que lo que importa en el momento de inercia es la distancia de cada elemento de masa hasta el eje. Dos elementos de masa separados una distancia z vertical contribuyen lo mismo a I_{zz}. Así que bien se los puede poner todos juntos con el mismo z, es decir achatar el ladrillo hasta formar una lámina. Por eso no aparece aquí el alto del auto: porque no importa cuando se calcula Izz. Por supuesto, si estuviéramos calculando el I_{xx}, el momento de inercia que rige los rolidos, el alto del auto sería crítico: un auto chato como una lámina no se puede dar vuelta inercialmente. Pero en ese caso sería irrelevante el largo del auto.

El momento de inercia de este cuerpo respecto a un eje perpendicular al auto, que pase por su centro geométrico, según muestra la figura 3, está dado por

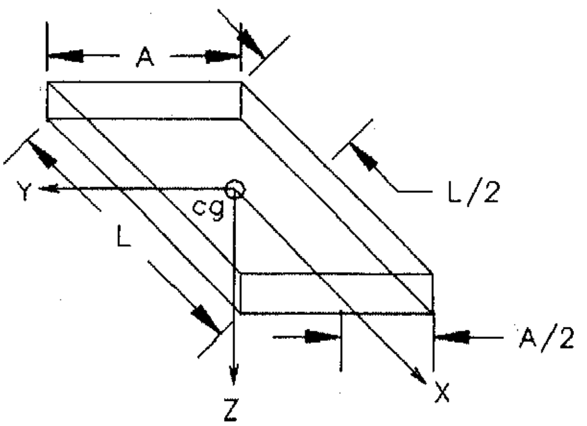


Figura 3: *Distribución de masa en el modelo uniforme del auto. El centro de masa (cg) coincide con el centro geométrico de la lámina.*

$$I_{zz} = \int_{L/2}^{L/2} dx \int_{A/2}^{A/2} dy(x^2 + y^2)\rho(x,y), \tag{6}$$

donde (x^2+y^2) es el cuadrado de la distancia de un punto dado hasta el eje de referencia, y $\rho(x,y)$ es la densidad de masa correspondiente a ese punto. Como la masa está distribuída uniformemente, $\rho(x,y)$ es una constante. Multiplicada por el área del auto, LA, debe ser igual a la masa total del auto, por lo cual

$$\rho(x,y) = \frac{M}{LA}. \tag{7}$$

Reemplazando esta función en la expresión para el momento de inercia e integrando, so obtiene

$$I_{zz} = \frac{M}{LA}[\frac{2}{3}(\frac{L}{2})^3 A + \frac{2}{3}L(\frac{A}{2})^3], \tag{8}$$

o sea

$$I_{zz} = \frac{M}{12}(L^2 + A^2). \tag{9}$$

Esta es la expresión que da el momento de inercia de una lámina rectangular de masa total M, respecto a un eje perpendicular *centrado*. Con centrado, se quiere decir que pasa por el centro de masa (cg).

Se puede probar esta expresión con los datos de la lista de la NHTSA. Como la lista no trae el ancho total de los autos, lo he reemplazado por la trocha delantera que sí figura.

A pesar de este reemplazo, esta aproximación sobrestima en promedio los momentos de inercia en un 10% y puede dar errores de hasta 25% en exceso y 7% en defecto. Si se divide la expresión por 1,1 se evita el 10% de error promedio, y se obtienen valores que no difieren más de un 15% de los medidos.

Se puede hacer un modelo mejor. Es claro que la masa del auto no está distribuida uniformemente (si lo estuviera, tendríamos que viajar sentados arriba del techo). No es necesario entrar en el detalle fino para verlo: el centro de la masa de un auto está por delante de su centro geométrico. Por un lado, la distancia entre el centro de masa y el eje delantero es mejor que la mitad de la distancia entre ejes, y por el otro la distancia entre el eje delantero y el frente del auto es menor que la que va del eje trasero a la cola. Por supuesto, esta asimetría se debe principalmente al motor y todo el complejo de aparatos que lo acompañan: caja de cambios, batería, radiador, generador, dirección, etc. La masa del tanque de combustible no alcanza a balancear este exceso. Por supuesto, esto vale para los autos con motor delantero; por eso he eliminado el Volkswagen Escarabajo, que figura en la lista de la NHTSA.

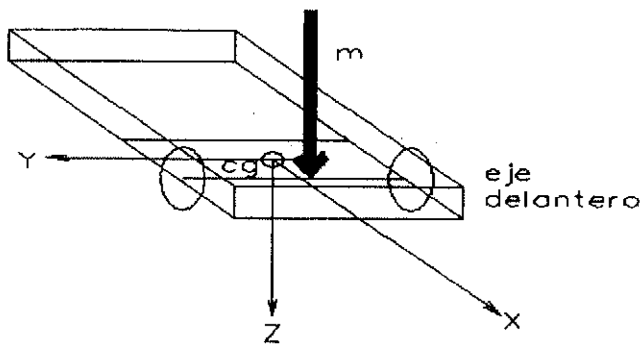


Figura 4: *Modelo con una masa extra localizada sobre el eje delantero, la "masa del motor". La presencia de esta masa desplaza el centro de masa (cg) por delante del centro geométrico.*

El modelo en esta nueva aproximación se basa en dividir la masa total (auto más ocupantes), M, en dos: una masa "del motor", m, puntual y localizada en el centro del eje delantero, y el resto, $M - m$, distribuida como antes uniformemente sobre todo el rectángulo del auto. El valor de m queda determinado por la posición real

del centro de masa: el centro de masa no coincide con el centro geométrico del rectángulo porque la masa no está uniformemente distribuída. La figura 4 muestra la distribución de masas y las distancias relevantes.
Si d_{cm} es la distancia desde el eje delantero al centro de masa, incluida en la lista de la NHTSA, Y df es la que va desde el frente del auto hasta el eje delantero, la distancia Δ en que el centro de masa está corrido respecto al centro geométrico del vehículo, situado en $L/2$, es

$$\Delta = \frac{L}{2} - df - d_{cm}. \tag{10}$$

Hemos supuesto que la masa del motor está concentrada sobre el eje delantero; de la misma manera, podemos suponer que la masa restante, M-m, está concentrada en el centro geométrico del rectángulo. La condición de equilibrio es que los momentos de ambos pesos se igualen, es decir que

$$md_{cm}=(M-m)\ \Delta, \tag{11}$$

que es la ecuación para determinar la "masa del motor", m, en función del corrimiento del centro de masa. Resolviendo la ecuación anterior, queda

$$m = M\ \frac{\Delta}{\Delta + d_{cm}} \tag{12}$$

Fíjese que $\Delta + d_{cm} = L/2 - df$, así que si el centro de masa está más atrás que el centro del auto, la "masa del motor" resulta ser negativa. Esto es lo que sucede si uno pone los parámetros del VW Escarabajo en la fórmula. Por supuesto, no hay motores con masas negativas, y este hecho pone bien en claro porqué he estado llamando a m "masa del motor", entre comillas: simplemente representa la asimetría en la distribución de masa, considerada positiva para la parte delantera del auto, y no la masa de un motor real.
Bien, ¿Cuán es ahora el momento de inercia del auto, en este nuevo modelo, respecto al eje vertical que pasa por el centro de masa del vehículo?. Pues la suma de las contribuciones de las dos masas, si recordamos la fórmula básica 2. La contribución de m es simplemente md^2_{cm}, y la de la masa distribuida M-m parecería se el momento de inercia de un rectángulo con esa masa, que ya sabemos calcular. No, no lo es: ese momento estaba calculado respecto a un eje que pasaba por el centro de masa del rectángulo, y el eje que nos interesa pasa por el *nuevo* centro de masa, es decir que está corrido, en una distancia Δ, respecto al del rectángulo.

3.3 TEOREMA DE STEINER

La solución a esta dificultad es simple, por suerte. Supongamos que, usando la definición básica 2 hemos calculado el momento de inercia de una distribución de masa respecto a un eje que pasa por el centro de masa

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \tag{13}$$

y ahora queremos saber cuánto vale el momento de inercia tomado respecto a otro eje, *paralelo al anterior*, y corrido de él en $\vec{R}$. Entonces las distancias del nuevo eje a cada elemento de masa ya no son $\vec{ri}$, sino $\vec{r'i}=\vec{R}+\vec{ri}$ el nuevo momento de inercia queda

$$I' = \sum_{i=1}^{N} m_i r'^2_i. \tag{14}$$

Ahora bien, el cuadrado del módulo de un vector es el producto escalar del vector con él mismo

$$\begin{aligned} r'^2_i &= (\vec{R}+\vec{r_i})\cdot(\vec{R}+\vec{r_i}) && (15)\\ &= R^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r_i} + r_i^2, && (16)\end{aligned}$$

donde el 2 del término central en la segunda línea viene de que es lo mismo $\vec{R}\cdot\vec{ri}$ que $\vec{ri}\cdot\vec{R}$. Aquí es donde entre el requerimiento de que el primer eje pasará por el centro de masa, porque si es así, este término central se hace cero al sumar sobre todas las masas. En ese caso

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{R}\cdot\vec{r_i} = \vec{r}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i} = 0, \tag{17}$$

porque la propiedad que define el centro de masa es precisamente que las masas se equilibran respecto a cualquier eje que pase por él. Así pues, el nuevo momento de inercia tiene forma especialmente simple:

$$\begin{aligned} I' &= \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 && (18)\\ &= MR_i^2 + I. && (19)\end{aligned}$$

Esto significa que hay que sumarle al viejo momento de inercia, el centrado, el producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes. Como esta contribución es siempre positiva, el momento de inercia centrado es menor que el que se calcula respecto a cualquier eje paralelo a él.
Este resultado matemático se conoce como *teorema de Steiner*, o *teorema de los ejes paralelos*. Vale oro a la hora de calcular los momentos de inercia de cuerpos complejos, pues permite hacerlo por parte, usando una biblioteca de momentos de formas más sencillas.
En el caso que nos concierne, el teorema de Steiner dice que el momento de inercia del rectángulo respecto al eje vertical que pasa por el centro de masa es

$$I'_{zz} = (M-m)\Delta^2 + \frac{(M-m)}{12}(L^2+A^2). \tag{20}$$

El segundo término en esta expresión es el momento centrado de una masa distribuida M-m, según la expresión 9, y el primero es la contribución extra que Steiner nos obliga a sumar por usar un que dista Δ del anterior.
En consecuencia, el momento de inercia total del auto en este modelo queda

$$I_{zz} = md^2_{cm} + (M-m)\Delta^2 + \frac{(M-m)}{12}(L^2+A^2). \tag{21}$$

Comparemos esta expresión con los datos experimentales, a ver cómo los ajusta. Aquí me he topado con una dificultad menor: la lista de la NHTSA no consigna la distancia d_f, del frente del auto hasta el eje delantero. Usando una recopilación de medidas de autos argentinos (12), he sacado que en promedio, esta distancia es de 0.19 del largo total, y este es el valor que he empleado en el cálculo de Δ.

La figura 5 muestra una comparación entre los valores medidos de la lista de la NHTSA y los calculados según la expresión 21.

La expresión 21 tiende a sobrestimar los momentos de inercia, pero en menos del 3%, frente a un 10% del modelo del rectángulo, y predice la gran mayoría de ellos con un error menor que el 10%. En ningún caso llega este error a un 15%, y su valor medio cuadrático (dispersión standard) es de menos de 7%.

3.4 CALCULO PRACTICO: PROGRAMA PARA PC

Quiere decir que, en base a los datos norteamericanos de la NHTSA, uno podría usar la expresión 21 para calcular momentos de inercia de guiñada, con un error no mayor de un 7% en promedio, o tal vez 15% en casos especialmente desfavorables. Por supuesto, no he comparado esta expresión con los valores de autos usados en la Argentina, porque como ya dije, no los tengo. Penso que la extrapolación es válida: la lista de la NHTSA no refleja particularidades provincianas del mercado estadounidense, sino que está integrada por un potpourri de marcas y modelos, de todo el mundo.

Uno puede pensar que mejor que calcular el valor del momento de inercia, sería tener datos del fabricante. Sí, de acuerdo a mí también me gustaría tener esos datos. Pero la mejora no sería tal: las mediciones del I_{zz} hechas por la NHTSA muestran diferencias apreciables entre distintos coches de la misma marca, modelo y año. ¿Cuál valor nos daría el fabricante? ¿Y cómo trataríamos la contribución de los ocupantes?.

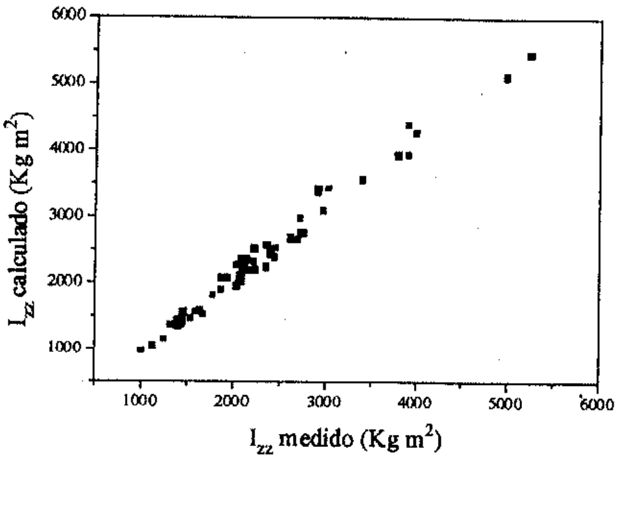


Figura 5: *Comparación entre los momentos de inercia I_{zz}, medidos y los calculados según el modelo explicado en el texto.*

Lo que uno quisiera tener al reconstruir un accidente es el momento de inercia del vehículo individual que chocó, pero ese dato es inasequible. Para empezar, medirlo requeriría una maquinaria extremadamente cara (10), y, en general, el vehículo que se tiene después del choque está tan deformado que su I_{zz} difiere de su valor original.

Con todas las salvedades posibles, la expresión 21 de una expresión razonable, que podemos usar en aquellas situaciones en que sea necesaria. Ya he dicho que no puedo garantizar su validez en cada caso, y su aplicación debe quedar a criterio del que la use. El estudio detallado de la contribución de los ocupantes al I_{zz} será objeto de una comunicación posterior.

El programa en BASIC que transcribo a continuación calcula el momento de inercia, según la expresión 21, cuando se le suministran los datos que pide.

La distancia d_f figura normalmente en las especificaciones técnicas de cada auto, y si no figura es fácil medirla, Si Usted no la tiene, el programa tomará el 19% de la longitud total del auto. Lo que no figura en los manuales es la posición del centro de masa. Si usted la tiene, bien, si no el programa considerará al centro de masa está a un 41% de la distancia entre los dos ejes. En general el centro de masa de un auto está aproximadamente al lado de la cadera derecha del conductor, entre los dos asientos delanteros.

Como ya dije, el modelo es válido para autos con motor delantero. Si tiene que calcular un caso con uno de motor trasero, tendrá que desarrollar su propia aproximación, usando los mismos criterios que he explicado. A continuación va el programa en BASIC, que Usted puede escribir en su máquina.

La versión real, que Usted puede copiar, en su versión fuente como `izz.bas`, si quiere modificarla, o en un programa ejecutable llamado `izz.exe`, que corre aunque Usted no tenga el BASIC en su máquina, contienen más instrucciones para evitarle errores a Usted. Por ejemplo, el par de líneas 7 y 8, que están ahí por si el usuario se equivoca y da datos en centímetros o en milímetros -a pesar de la advertencia al comienzo, eso nos pasa a todos, todo el tiempo- corrigen lo que el programa estima que es un error, y en el programa grabado se repiten, *mutatis mutandi*, después de cada dato. Los valores de control son razonables, pero si Usted realmente quiere algún día calcular el momento de inercia de un auto de 548 metros de largo, tendrá que meterse al programa y anular esas líneas, borrándolas o poniéndolas un `REM` al comienzo.

Al final del programa, si el momento de inercia `izz` ha salido menor que 900 Kg m2 o mayor que 5000 Kg m2, se le llama la atención: ese valor es desusado, y está fuera del rango de la lista de la NHTSA para autos. Puede ser que Usted esté tratando con un auto muy especial, pero queda advertido; lo más probable es que haya tecleado mal algún número, o se haya equivocado en las unidades.

Una fuente de errores es que estamos acostumbrados a dar pesos en Kilogramos (que realmente indican masa), mientras que el sistema SI insiste en que deberíamos usar newtons. La lista de la NHTSA da en ello s los pesos, pero el programa aprovecha la costumbre general argentina, ya que al calcular I_{zz} importan las masas. Hay una línea del programa que trata de corregir posibles errores: si Usted entra un peso superior a los 7000 Kg, el programa supone que ha usado newtons, por lo cual corrige (en realidad, Ud. tiene razón), dividiendo por 9,8.

```
REM     Este programa calcula el momento
        de inercia Izz de un auto
COMIENZO:
CLS     'limpia la pantalla
PRINT   "Recuerde que tiene que usar metro y
        kilogramos,
        y punto decimal en vez de la coma."
```

```
INPUT   "Largo total del auto, en metro", L
IF L>   300 AND L<700 THEN L=L/100: PRINT "Es-
        ta bien,
        pero creo que eso esta en centímetros.
        Por favor use metro la próxima vez."
IF L>   3000 THEN L=L/1000: PRINT
        pero creo que eso esta en milímetros.
        Por favor use metros la próxima vez."
INPUT
INPUT
INPUT
        Si no la sabe, ponga 0", DF
IF DF=0 THEN DF=0.19*L
REM     Esta es una aproximación promedio
INPUT
        Si lo sabe, ponga 0", DCM
IF DCM= 0 THEN DCM=0.41*DE
REM     esta es una aproximación promedio
INPUT
        más ocupantes, en kilogramos", M
IF M>7000 THEN M=M/9.8:PRINT
        ese peso debe estar en Newtons.
        Use Kg. la próxima vez."
delta = L/2 - DF - DCM
REM distancia entre centro de masa y geomé-
        trico
mmot=M*delta/ (delta+DCM)
REM
izz=mmot*dcm^22+(M-MMOT)*delta^2+(M-mmo-
        t)*(L^2+A^2)/12
REM     este es el momento de inercia centra-
        do
PRINT   "El momento de inercia es";INT(izz);
        "Kg m^2"
REM El resultado ha sido redondeado, sacándo-
        le los decimales
IF izz<900 OR izz>5000 THEN PRINT "Este valor
        me parece raro, revise los números que
        ha usado."
INPUT   "Si quiere calcular otro, entre 1,
        si quiere terminar, entre 0 ", S
IF S=1 GOTO COMIENZO
END
```

Reproducido de
CIENCIA ENERGETICA Nº 101
COPIME - BUENOS AIRES - 1997