

EL ANÁLISIS DE LA COLISIÓN ALINEADA EXCÉNTRICA

Ing. Aníbal O. García.

RESUMEN

El presente trabajo es una revisión y ampliación de los conceptos de *Raymond McHenry* respecto de la modelación simplificada de la colisión lineal excéntrica, tal como la hemos tratado en el capítulo 4.3 de nuestro libro¹ Esta ampliación ha sido incluida en la sección 6 de la segunda edición del mismo.

La revisión incorpora al análisis el concepto de *velocidad equivalente de barrera (EBS)*, equiparada al concepto de velocidad relativa a la velocidad del centro de masa de la colisión. Y como conclusión, para el caso específico de la colisión excéntrica, revela que la *EBS* determina la magnitud de la velocidad angular post impacto. Para una condición de excentricidad en el vehículo y un cierto valor de desaceleración dado por el contexto de la relación vehículo pavimento, la velocidad angular puede asociarse con el ángulo de rotación total del vehículo.

Esta propiedad se determina en primer lugar para la colisión excéntrica de un vehículo contra un poste u otro elemento fijo a la Tierra (y por ende con masa infinita respecto de la del vehículo), y se extiende al análisis de la colisión excéntrica entre dos automotores.

Para el análisis se descompone la colisión general en dos colisiones contra una barrera ideal que se mueve a la velocidad del centro de masa de la colisión (5.81), y superponiendo en ella una segunda descomposición: la de colisión colineal de *masa reducida* ($G_i \cdot m_i$), cuya evidencia es la energía disipada L_{di} por un lado, y la rotación pura derivada de la colisión de la *masa no-reducida* $[(1-G_i) \cdot m_i]$, cuya evidencia es el ángulo barrido Θ_i .

La componente colineal de la colisión se trata acudiendo a la forma general (6.2). Como se puede apreciar, para excentricidades pequeñas, dado que el valor de G tiende a 1, esta puede ser una solución muy aproximada. El tratamiento de la segunda componente de la colisión constituye el objeto de este trabajo.

¹ *Aníbal O. García – ACCIDENTES DE TRÁNSITO – Investigación y Reconstrucción*, Ed. Nueva Librería, Buenos Aires 2011 (ISBN 978-987-1104-55-0). Las referencias numéricas entre paréntesis indican página o sección de esta obra.

1.- COLISIÓN EXCÉNTRICA CONTRA OBJETOS FIJOS

El desarrollo de un modelo para colisión frontal excéntrica publicado en el año 1975 (4.31)

dedujo el término $G = \frac{i^2}{i^2 + h^2}$, al que por razones de conveniencia formal se lo caracterizó como *factor de reducción de masa* en la colisión excéntrica. El valor de este coeficiente es re-analizado en este párrafo desde una visión más amplia de la conservación de la energía.

Se puede asumir una representación física de este factor, asimilándolo a un choque colineal de un automóvil contra una barrera, cuya masa es reducida por el factor G . Esta modelación conduce entre otras cosas, a pensar en la porción de la energía cinética del móvil previo al impacto, que en tanto no se disipa en la colisión, se conserva en el post impacto; esa porción de energía debe ser proporcional a la *masa no-reducida* $[(1-G) \cdot m]$ (4.31)

En el planteo original de *McHenry*, no se considera ese remanente de energía. De hecho, todo el análisis se reduce a determinar la relación entre la variación de velocidad en el centroide de contacto, con la variación de velocidad en el centro de masa del rodado. Ambas velocidades están en la dirección del eje X, es decir la dirección de la trayectoria previa.

Este modelo responde a la simplificación de dos masas unidas por un brazo rígido de masa despreciable. Del análisis que resulta de la aplicación de este modelo simplificado, se deduce la relación de G referida en el inicio de este párrafo².

Desde el punto de vista de la reconstrucción analítica de este tipo de colisiones, puede resultar de interés considerar la rotación inducida que se manifiesta en el movimiento post impacto. Este movimiento es de mayor magnitud cuanto mayor resulta la excentricidad y la velocidad relativa de impacto. Para fijar una imagen de ello se puede tomar en cuenta el caso de colisiones frontales muy excéntricas, que suceden a menudo en rutas de dos carriles.

Para simplificar el análisis primario del problema, veamos el caso de una colisión frontal parcial a una velocidad v , contra un objeto fijo a la Tierra, es decir de masa infinita y gran rigidez relativa. En este caso, la velocidad del centro de masa es nula, y una componente relevante del movimiento de post impacto es la rotación ω' , asociada a la velocidad de traslación $v' = \omega' \cdot R$, y a un movimiento de rotación pura en torno del centro de masa. El centro de rotación instantáneo se encuentra en el centro de la superficie deformada, y su módulo es en este caso $R = \sqrt{h^2 + d_g^2}$, con $d_g = x_g - C$, donde el término x_g es la distancia del frente del automóvil al centro de masa del mismo³, y C la deformación residual máxima. La energía disipada en este choque será (5.6):

$$L_d = \frac{1}{2} G \cdot m \cdot v^2 \cdot (1 - e^2),$$

² El modelo simplificado proviene entre otros de la física aplicada al deporte. Analizando colisiones de pelota vs. elemento de impacto (caso del baseball, tenis o paleta), el análisis del factor G busca su maximización con el objeto de impactar a la pelota con la mayor masa posible. La incidencia de un valor alto de h obviamente incide en un tiro de menos alcance.

³ Cuando no se dispone de un valor definido de la distancia del frente del automóvil al centro de masa, sugerimos estimar con la relación de la mitad de la distancia entre ejes más el voladizo delantero, aproximadamente el 55% de la diferencia entre la longitud total L , y la distancia entre ejes E_e ; $x_g = 0,55 \cdot L - 0,05 \cdot E_e$

donde $\frac{1}{2}G \cdot m \cdot v^2$ representa la energía disponible, y $\frac{1}{2}G \cdot m \cdot (e \cdot v)^2$ será la energía cinética de la masa $[G \cdot m]$ a la velocidad de rebote $[e \cdot v]$. Por lo tanto la energía remanente que se materializa en la rotación, debe ser por lo menos:

$$E' = \frac{1}{2}(1-G) \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot (i^2 + R^2) \cdot \omega'^2 \quad \text{de la que deriva: } G = 1 - (i^2 + R^2) \cdot \frac{\omega'^2}{v^2}$$

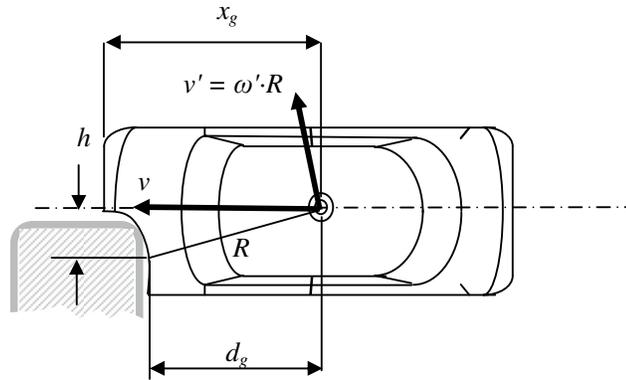


Fig 1 – Colisión excéntrica contra un objeto fijo

La conservación del impulso angular en este caso será $m \cdot v \cdot h = m \cdot (i^2 + R^2) \cdot \omega'$, de donde se deduce:

$$\frac{\omega'}{v} = \frac{h}{i^2 + R^2} \quad \text{y en consecuencia} \quad \left(\frac{\omega'}{v}\right)^2 = \frac{h^2}{(i^2 + R^2)^2} \quad \text{que reemplazando y operando deriva en:}$$

$$G = \frac{i^2 + d_g^2}{i^2 + d_g^2 + h^2}$$

En tanto que $d_g > h$, el valor de G resulta siempre superior y más próximo a 1, que el que resulta de la relación clásica de McHenry (4.31). Como se verá más adelante, la velocidad de impacto es inversamente proporcional a la relación $[1 - G]$, por lo que un valor más alto de G dará como resultado una velocidad de impacto menor. En base a estas consideraciones se puede concluir en que en la reconstrucción de colisiones excéntricas, el criterio clásico tiende a subestimar la velocidad de impacto.

Retomando el tema de la reconstrucción de la colisión excéntrica contra elementos fijos, se puede apelar a la relación de la velocidad de impacto v con la velocidad de rotación post impacto ω' . Para ello se habrá de considerar que esa rotación está afectada por un fenómeno de desaceleración debida al contacto de los neumáticos con el pavimento. Si hasta detenerse el móvil recorre un ángulo Θ , y la desaceleración media es $\gamma = \omega'/t$, donde t es el tiempo que dura el movimiento, el ángulo barrido será $\Theta = \frac{1}{2} \omega' \cdot t$. Combinando ambas ecuaciones se puede aproximar la velocidad inicial de rotación $\omega'^2 = 2\gamma\Theta$.

En este caso se trata de la rotación del centro de masa respecto al centro de la superficie deformada, más la rotación del móvil respecto del mismo centro de masa, ambas en la misma magnitud Θ , y en el mismo período. Partiendo de la segunda Ley de Newton para impulso

angular (Momento igual a inercia por aceleración angular; $M = I \cdot \gamma$), y conforme a la deducción clásica (3.14), el módulo de la desaceleración resulta:

$\gamma = \frac{\mu g \cdot (R + r)}{i^2 + R^2}$. Reemplazando en la ecuación de la energía remanente se obtendrá:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g \cdot (R + r) \cdot \Theta}{1 - G}}$$

Por otra parte, derivando de la ecuación de conservación del impulso angular –o momento de la cantidad de movimiento- en la colisión, resultará:

$$v = \sqrt{2\mu g \cdot (R + r) \cdot \Theta \cdot \frac{i^2 + R^2}{h^2}}$$

Ambas ecuaciones son coincidentes, asumiendo el valor de G deducido.

La velocidad v estimada precedentemente, por tratarse de una colisión con velocidad del centro de masa nulo, representa la velocidad equivalente de barrera *EBS*. Es la velocidad informada por NHTSA, en los ensayos normalizados de colisión contra barrera con el 40% del ancho, por ejemplo. De manera que se puede vincular la magnitud de la energía disipada como trabajo de deformación con la velocidad representada en las ecuaciones precedentes. Esta relación brinda otro camino independiente para abordar la reconstrucción de las colisiones excéntricas contra objetos fijos a la Tierra (masa infinita), aplicando alguno de los modelos clásicos de deformación basados en las tesis de *Kenneth Campbell*.

Con cualquiera de las estimaciones aplicables –y mejor con todas ellas-, se obtendrá un rango posible de valores de L_d y de velocidad *EBS*. En el primer caso se podrá hacer la transformación recordando que es producto de una masa reducida $m' = G \cdot m$, y:

$$v = EBS = \sqrt{\frac{2 \cdot L_d}{m'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot L_d}{G \cdot m}}$$

2.- REPRESENTACION CINEMÁTICA DE LA COLISION EXCÉNTRICA

La magnitud de la rotación pura Θ_i , es decir, el giro total del vehículo respecto a su condición de marcha previa al impacto e independiente del desplazamiento de su centro de masa, está asociado con la *masa no-reducida* $[(1-G_i) \cdot m_i]$. Esto es consecuencia de descomponer el vector que representa a la velocidad post impacto en dos a saber: la velocidad de desplazamiento asociada a la velocidad del centro de masa de la colisión por un lado, y por el otro, la velocidad de rotación impresa por esa misma excentricidad. El esquema cinemático propuesto está representado en la *Fig II*.

De acuerdo a ese esquema, las velocidades post impacto v'_i se descomponen en la dirección X (v'_{ix}), y en la dirección normal al radio instantáneo de rotación ($\omega'_i \cdot R_i$). Las velocidades v'_{ix} son las componentes de las velocidades de traslación post impacto en la dirección del eje X, el de la dirección de marcha de ambos vehículos al iniciarse la colisión. Son específicamente las velocidades post impacto derivadas de la colisión colineal ideal de automóviles de masa $G \cdot m$.

Por lo tanto su relación debe verificar una dinámica del tipo de la graficada analíticamente en el diagrama de la Figura III, de la que derivan las funciones que relacionan energía disipada con restitución entre otras.

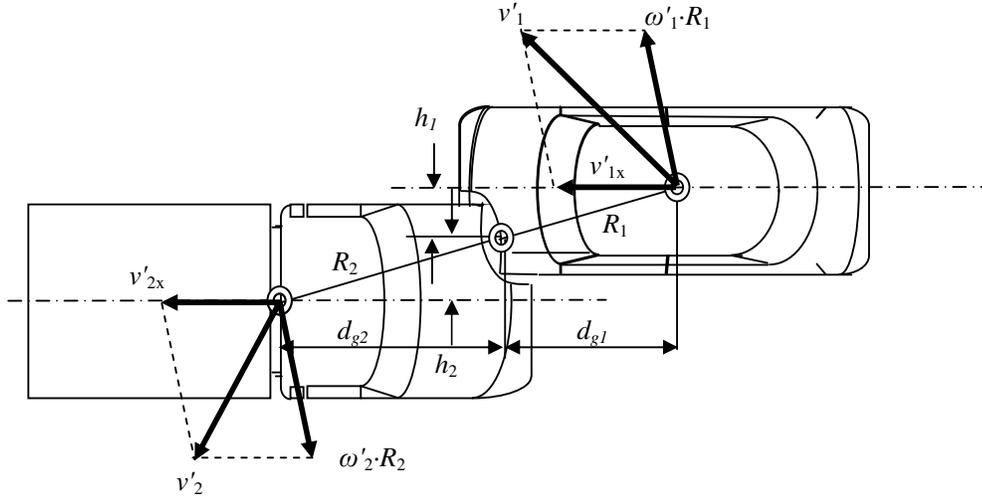


Fig II – Cinemática de la colisión alineada excéntrica

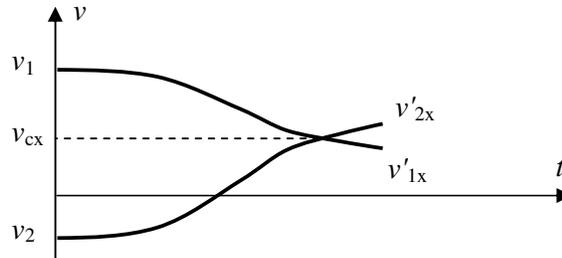


Fig III – Representación dinámica de la colisión alineada excéntrica

Como se ha demostrado en el párrafo anterior, las velocidades relativas a la velocidad del centro de masa, son las respectivas velocidades equivalentes de barrera EBS_1 y EBS_2 , relacionadas con la deformación de los vehículos:

$$EBS = \sqrt{\frac{2 \cdot L_d}{G \cdot m}}$$

Dada la igualdad derivada de la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento durante la colisión, se podrá escribir

$$m_1 \cdot \sqrt{\frac{2L_{d1}}{G_1 \cdot m_1}} = m_2 \cdot \sqrt{\frac{2L_{d2}}{G_2 \cdot m_2}} \text{ de donde deriva el cociente } \frac{L_{d2}}{L_{d1}} = \frac{m_1 \cdot G_2}{m_2 \cdot G_1}$$

que se relacionan con el ángulo barrido Θ y el coeficiente de desaceleración μ de cada uno de los vehículos, dados por las expresiones ya deducidas:

$$EBS = \sqrt{\frac{2\mu g \cdot (R+r) \cdot \Theta}{1-G}} \quad \text{o bien} \quad EBS = \sqrt{2\mu g \cdot (R+r) \cdot \Theta \cdot \frac{i^2 + R^2}{h^2}}$$

En cualquiera de los casos, deberá verificarse que los valores estimados satisfagan la relación $G_1 \cdot m_1 \cdot EBS_1 = G_2 \cdot m_2 \cdot EBS_2$. Esta es una condición propia de la colisión colineal como ya se ha visto, que deriva de la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento. Escrita de otro modo, como relación de velocidades, resulta:

$$\frac{EBS_1}{EBS_2} = \frac{G_2 \cdot m_2}{G_1 \cdot m_1} = m \cdot \frac{G_2}{G_1} = K \quad \text{con} \quad m = \frac{m_2}{m_1}$$

Reemplazando valores y ordenando resultará:

$$K^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{R_1 + r_1}{R_2 + r_2} \cdot \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \frac{i_1^2 + R_1^2}{i_2^2 + R_2^2} \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{R_1 + r_1}{R_2 + r_2} \cdot \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \left(\frac{1-G_2}{1-G_1}\right)$$

Como se puede observar, las relaciones de velocidad dependen de la relación de las masas del los vehículos, de sus características geométricas, de los ángulos barridos, del factor de desaceleración lineal, y de las relaciones de excentricidad. Llamando:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \quad R = \frac{R_1 + r_1}{R_2 + r_2}; \quad \Theta = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}; \quad I = \frac{i_1^2 + R_1^2}{i_2^2 + R_2^2}; \quad H = \left(\frac{h_2}{h_1}\right); \quad \text{y} \quad G = \left(\frac{1-G_2}{1-G_1}\right),$$

se podrá escribir de manera abreviada

$$K^2 = \mu \cdot R \cdot \Theta \cdot I \cdot H^2, \quad \text{ó bien} \quad K^2 = \mu \cdot R \cdot \Theta \cdot G.$$

Además se puede verificar que $\frac{L_{d1}}{L_{d2}} = \frac{m^2}{K}$

Es decir que a los efectos de determinar la velocidad de cada uno de los rodados, relativa al centro de masa de la colisión, existen al menos dos caminos independientes. El primero basado en las relaciones geométricas y de deslizamiento. Y el segundo, en las relaciones masa y de energía disipada en trabajo de deformación. De acuerdo a la evidencia, es posible que alguno de los términos se simplifique. Por ejemplo, si ambos vehículos realizaron su movimiento de rotación post impacto sobre el mismo tipo de suelo, es posible que la relación μ sea muy próxima a la unidad.

Por otra parte se puede resolver la incógnita del brazo de excentricidad, valor que no siempre es posible determinar con precisión en base a los rastros. Para ello se puede asumir que el ancho total de contacto es una fracción f del ancho de uno de los vehículos. En ese caso resultará:

$$h_1 = \frac{1-f}{2} \cdot W_1 \quad \text{y} \quad h_2 = \frac{W_2 - f \cdot W_1}{2} \quad \text{de donde resulta} \quad H = \frac{1-f}{\frac{W_2}{W_1} - f}$$

El factor f puede ser considerado una variable en un modelo exploratorio, donde el resto de las características geométricas están definidas de por sí, o relacionadas con f .

El problema que resta resolver es determinar la velocidad del centro de masa, valor que habrá que adicionar a las velocidades relativas determinadas, con el signo que corresponda según sea la composición de las cantidades de movimiento lineal post impacto de cada rodado. Para ello se deberá considerar por separado la traslación del centro de masa de cada vehículo en la dirección

previa al impacto –es decir la componente en el eje X de colisión-, desechando movimientos de deslizamiento lateral puro o derivado de la misma rotación. La ecuación a considerar será entonces:

$$v_c = \frac{G_1 \cdot m_1 \cdot v'_{1x} + G_2 \cdot m_2 \cdot v'_{2x}}{G_1 \cdot m_1 + G_2 \cdot m_2}$$

Quizá uno de los problemas más delicados a resolver en el análisis de colisiones alineadas excéntricas, resulta del hecho de que no es tan sencillo separar ambos movimientos, y los errores de apreciación impactarán de una manera imprevisible e incontrolable en los resultados.

Algunas condiciones especiales pueden acudir en ayuda del analista. Una de ellas puede ser que la masa e inercia de uno de los vehículos sea muy grande respecto del otro (caso frecuente de choques entre automóviles con ómnibus y camiones). En ese caso lo más probable es que el mayor de los móviles no experimente una rotación significativa, y continúe su trayectoria hasta el reposo de modo más o menos lineal con una velocidad post impacto v'_2 .

Si así fuera, se puede simplificar el análisis considerando la colisión de un solo vehículo que colisiona a una barrera de masa infinita que se mueve con velocidad v_c . Tomando en cuenta las relaciones de masa y de excentricidad, en este caso se podrá estimar la velocidad del centro de masa como:

$$v_c = v'_2 + e \cdot \frac{G_1 \cdot m_1}{G_2 \cdot m_2} \cdot EBS_1 \quad \text{y la velocidad del vehículo mayor como}$$

$$v_2 = v'_2 + (1 + e) \cdot \frac{G_1 \cdot m_1}{G_2 \cdot m_2} \cdot EBS_1$$

Otra simplificación posible surge del hecho de que ambos vehículos experimenten rotaciones puras, cuyo centro se encuentra muy próximo al punto de colisión. En ese caso se podrá plantear la hipótesis de velocidad nula del centro de masa, y equiparar las velocidades absolutas a las velocidades relativas a él.

Buenos Aires, febrero de 2015 - marzo de 2017-----